平成 30 年度 京都府立桃山高校
自然科学科入試問題解説

Dr. 竹中英数塾 竹中 浩

2018 年 6 月 16 日

概要

今年度の京都府立桃山高等学校 自然科学科の数学の入試問題解説です。できるだけ丁寧な解説を行っています（ページ数が限られている赤本よりも詳しいです)。

桃山の自然科学科の数学は極端に難しい問題はなく，中学 3 年間の数学を使いこなせれば解ける問題で構成されています。設問総数は，前記共通問題よりも 2 問少ないですが，大問 1 の基本問題数が少ないので全体としての難易度は上がります。50 分間という限られた時間で完全に解答するのは（私でも）困難ですので取れる問題を確実に得点して，それから得意な問題で点数アップすることが重要です。

大問 1 と大問 2 はウォームアップ問題。大問 3 以降も各小問の (1) は，大問 6 を除いて基礎問題です。逆に完全な捨て問題の大問がないので，各大問の中で解ける小問を取りこぼしなく得点する必要があります。今年は最後の大問 8 でも (1) は簡単なボーナス問題でした。桃山自然科学の数学では先ず最初に問題冊子に最後まで目を通して取れる小問を見定めて確実に得点を積み上げる事が必要です。

今年の数学問題でで必ず得点しなければならないのは，大問 1(1)，(2)，大問 2(1)，(2)，大問 3(1)，大問 4(1)，(2)，大問 5(1)，(2)，問 7(1)，大問 8(1) です。

桃山の自然科学科の入試は，国数理英 4 教科の独自問題 400 点と，報告書（内申）100 点（3 年間の成績 135 点満点を 100/135 倍に圧縮)，面接 25 点ですので，ほぼ当日点勝負です。確実な合格のためには当日点の目安として 7 割以上が必要と思われますので、上記の必須解答問題の得点をスタートラインにして，点数を積み上げて下さい。

今年度の問題で最も正答率が低かったと思われるのは大問 6 です。特に小問 (3) は難しいです。その他，大問 4 の (3) と記述問題である大問 8 の (3) も正答率が低かったと思われます。

桃山の自然科学科の数学は 7 割以上の高得点での勝負になると思われますが，中学 3 年間の数学を使いこなせれば十分に太刀打ち出来ます。中学数学の基本事項をしっかり身につけた上で，自由自在に活用出来るように日頃から応用問題に取り組んで下さい。

大問 1

問題

小問 (1)
$(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{8})+\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right)^2$ を計算しなさい。 ……答えの番号【1】

小問 (2)
$a=2$，$b=0.5$ のとき，$6a^3b \div (-9a^4b^3) \times (-3ab^2)^2$ の値を求めなさい。 ……答えの番号【2】

解答

小問 (1)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)+\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 \\
&= (3-8)+\left(2-2\sqrt{6}+3\right) \\
&= -5+5-2\sqrt{6} \\
&= \underline{-2\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

小問 (2)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 6a^3b \div (-9a^4b^3) \times 9a^2b^4 \\
&= -6a^3b \times \frac{1}{9a^4b^3} \times 9a^2b^4 \\
&= -6a^3b \times \frac{1}{a^2} \times b \\
&= -6ab^2
\end{aligned}
$$

右上へ

$a=2$，$b=0.5$ を代入

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= -6 \times 2 \times 0.5^2 \\
&= -6 \times 2 \times 0.25 \\
&= \underline{-6 \times 0.5 = -3}
\end{aligned}
$$

解説

大問 2

問題

二次方程式 $3x^2+(a-4)x+1=0$ ……①　について，次の問い (1)・(2) に答えなさい。ただし，a は定数とする。

小問 (1)
$a=9$ のとき，二次方程式の解を求めなさい。　……答えの番号【3】

小問 (2)
二次方程式①の解の 1 つが a であるとき，a の値を求めなさい。
……答えの番号【4】

解答

小問 (1)
①式に $a=9$ を代入して，

$$3x^2+5x+1=0$$

解の方程式を用いて，

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times1}}{2\times3} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{25-12}}{6} \\ &= \underline{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}} \end{aligned}$$

小問 (2)
①式に $x=a$ を代入する。

$$3a^2+(a-4)a+1=0$$

展開整理する。

$$3a^2+a^2-4a+1=0$$

$$4a^2-4a+1=0$$

$$(2a-1)^2=0$$

$$2a=1$$

よって，$\underline{\therefore a=\frac{1}{2}}$

解説

(1) は二次方程式の解の公式を素直に使って下さい。(2) は題意の通り，x に a を代入して a に関する二次方程式を作って下さい。この 2 問も確実に得点して下さい。

大問 3

問題

下の表は, 40 人で実施したあるゲームの得点とその人数の一覧である。

得点 (点)	0	4	6	8	合計
人数 (人)	6	x	y	12	40

このとき，次の問い (1)・(2) に答えなさい。

小問 (1)

40 人の得点の平均値が，5.4 点であるとき，x の値を求めなさい。

‥‥‥答の番号【5】

小問 (2)

得点の修正があり，6 点が 9 点に，8 点が 10 点となったため，得点の平均値が元の平均値より 0.9 点増加したという。このとき，x の値を求めなさい。

‥‥‥答の番号【6】

解答

小問 (1)

人数に対する方程式は，

$$6 + x + y + 12 = 40$$

平均点より得点の合計は，5.4×40 点であるので，

$$0 \times 6 + 4 \times x + 6 \times y + 8 \times 12 = 5.4 \times 40$$

この式を整理して，

$$\begin{cases} x + y = 22 \cdots ① \\ 4x + 6y = 120 \cdots ② \end{cases}$$

②－①×4 より，

$$\begin{array}{rrcr} & 4x+6y & = & 120 \\ -) & 4x+4y & = & 88 \\ \hline & 2y & = & 32 \end{array}$$

$y=16$ を①に代入して，

$$x+16=22$$

よって，$\underline{\therefore x=6}$

小問 (2)

得点の修正に伴う平均値の変化の式を求める。

$$\frac{0\times 6+4x+9y+10\times 12}{40}-\frac{0\times 6+4x+6y+8\times 12}{40}=0.9$$

これを整理して，

$$(4x+9y+120)-(4x+6y+96)=0.9\times 40=36$$

$$3y=12$$

$y=4$ を①に代入して，

$$x+4=22$$

よって，$\underline{\therefore x=18}$

解説

(1) は合計人数と全員の得点総計に関する連立方程式を立てるだけです。総得点 ＝ 平均点×人数 である事を思い出して下さい。

(2) は注意が必要です。この設問における”元の平均点”は前問の 5.4 点ではありません。ある元の平均点から得点の修正により，平均点が 0.9 点増加したという設問です（白状すると私も最初勘違いしてしまいました）。元の配点と修正後の配点に関して，それぞれ平均点の式を作り，修正後 − 修正前 = 0.9 点という，問題文をそのまま立式をするのが最も素直な解き方です。

大問 4

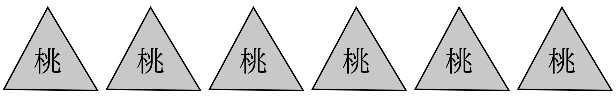
問題

桃色の三角形のタイルが 6 枚，下の図 1 のように，横一列に並んでいる。いま，1 から 6 までの目がある大小 2 つのさいころを同時に投げ，次の規則に従ってこのタイルに，白または赤の色を塗る。

【規則】

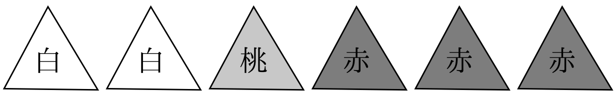
(ア)　大きい方のさいころの出た目の数だけ，左端のタイルから順に白色を塗る。
(イ)　小さい方のさいころの出た目の数だけ，右端のタイルから順に赤色を塗る。
(ウ)　(ア)(イ) のとき，白色と赤色がともに塗られたタイルは元の桃色に戻る。

(図 1)



たとえば，大きい方のさいころの目が 3 で，小さい方のさいころの目が 4 であるとき，左端から 3 枚のタイルに白色，右端から 4 枚のタイルに赤色を塗るので，下の図 2 のように，左端から順に白色のタイルが 2 枚，桃色のタイルが 1 枚，赤色のタイルが 3 枚となる。

(図 2)



このとき, 次の問い (1) ～ (3) に答えなさい。ただし，大小それぞれのさいころの 1 から 6 までの目の出方は，同様に確からしいものとする。

小問 (1)

桃色のタイルが 1 枚もなくなる確率を求めなさい。　・・・・・答の番号【7】

小問 (2)

桃色のタイルが 1 枚となる確率を求めなさい。　・・・・・答の番号【8】

小問 (3)

桃色のタイルの数が，他のどの色のタイルの数よりも多くなる確率を求めなさい。

・・・・・答の番号【9】

解答

小問 (1)

桃色のタイルが 1 枚もなくなるためには，大きいサイコロの目と小さいサイコロの目の合計が 6 であればいいので，$(\text{大}, \text{小}) = (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ の 6 通り。よって，

$\therefore$ 桃色が 1 枚もなくなる確率 $= \dfrac{5}{36}$

小問 (2)

桃色のタイルが 1 枚になるためには，大きいサイコロの目と小さいサイコロの目の合計が 7（1 枚 2 度塗り）もしくは 5（1 枚塗り変えなし）であればいい。

大 + 小 = 7 の時，

$$(\text{大}, \text{小}) = (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$

大 + 小 = 5 の時，

$$(\text{大}, \text{小}) = (1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$$

よって，

$\therefore$ 桃色が 1 枚になる確率 $= \dfrac{6+4}{36} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

小問 (3)

桃色が他のどの色よりも大きくなる場合は，桃色 6 枚···①，桃色 5 枚···②，桃色 4 枚···③，桃色 3 枚···④，の 4 通りがある。

■①の場合　サイコロの目は最小が 1 なので，桃色が 6 枚になるのは 6 枚全てが 2 度塗りされた場合である。よって，$(\text{大}, \text{小}) = (6,6)$ の 1 通り。

■②の場合　①と同様に桃色が 5 枚になるのは，5 枚が 2 度塗りされた場合である。よって，$(\text{大}, \text{小}) = (6,5),(5,6)$ の 2 通り。それぞれ，(白 1, 桃 5)，(桃 5, 赤 1)

■③の場合　桃色が 4 枚になるのは，4 枚が 2 度塗りされた場合と，4 枚が塗り変えなしの場合である。(a) 2 度塗りの場合，大小の合計が 10 であるので，$(\text{大}, \text{小}) = (6,4),(5,5),(4,6)$ の 3 通り。それぞれ，(白 2, 桃 4)，(白 1, 桃 4, 赤 1)，(桃 4, 赤 2)。(b) 塗

り変えなしの場合は，(大, 小) = $(1, 1)$ の 1 通りで、(白 1, 桃 4, 赤 1)。よって，$3 + 1 = 4$ 通り。

■④の場合　桃色が 3 枚になるのは，3 枚が 2 度塗りされた場合と，3 枚が塗り変えなしの場合であり、さらに桃色が赤，白よりも多いので, 残りの 3 枚が赤と白に別れなければならない。
(a) 白 1, 赤 2 の場合
(大, 小) = $(4, 5), (1, 2)$ の 2 通り。両者とも，(白 1, 桃 3, 赤 2)
(b) 白 2, 赤 1 の場合
(大, 小) = $(5, 4), (2, 1)$ の 2 通り。両者とも，(白 2, 桃 3, 赤 1)
よって，$2 + 2 = 4$ 通り。

①〜④より，桃色が一番多くなるのは $1 + 2 + 4 + 4 = 11$ 通りあるので,
$\therefore$ 桃色が他の色より多い確率 $= \dfrac{11}{36}$

解説

タイルの塗替えのルールをしっかり頭に入れて考えて下さい。大小 2 つのサイコロの目の出方は 36 通りです。

(1) 桃色が 1 枚もなくなるのは，全タイルが塗り替えられて，かつ，2 度塗りが起こらない場合です。よって，大小のサイコロの目の和が，タイルの枚数 6 枚に等しい場合です。

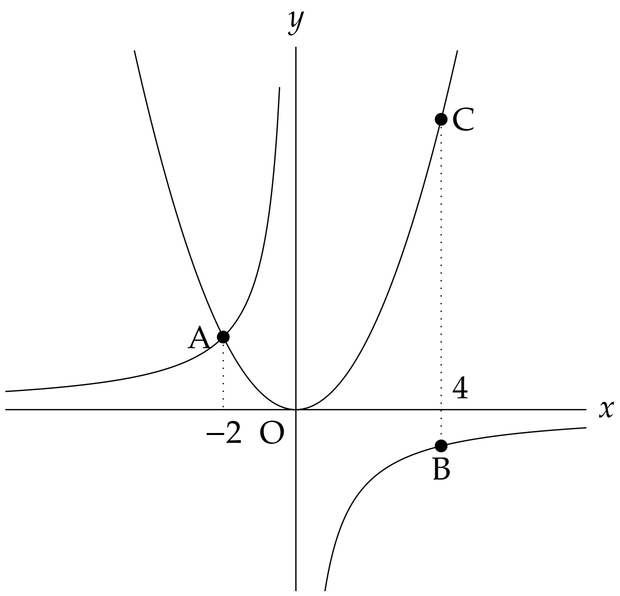
(2) 桃色が 1 枚になるのは，1 枚だけ塗替えが起きなかった場合と，1 枚だけ 2 度塗りされた場合です。従って，大小の目の和が 5 の場合と，大小の目の和が 7 の場合に分けて数えます。

(3) 桃色が他の色よりも多くなる場合を全て考えて下さい。また，サイコロの目の最小値は 1 なので少なくとも 2 枚のタイルは塗り替えられます。桃色が他のどの色よりも多くなる場合は，桃色が 6 枚，5 枚，4 枚，3 枚の 4 通りが考えられます。桃色が 6 枚と 5 枚は必ず 2 度塗りによって起こります。4 枚と 3 枚は 2 度塗りが起こった場合と起こらない場合の両方があります。さらに桃色 3 枚では必ず残りのタイルが赤と白に別れていなければ，桃色が一番多いことになりません。以上に気をつけて，全ての場合を数え上げて下さい。

大問 5

問題

下の図は，関数 $y = -\dfrac{4}{x}$ $\cdots$① と $y = ax^2$ $\cdots$② のグラフである。ただし a は，正の定数である。関数① と②のグラフは，点 A で交わり，その x 座標は -2 である。また，x 座標が 4 である関数①，②のグラフ上の点をそれぞれ B，C とする。
このとき，下の問い (1)〜(3) に答えなさい。



小問 (1)

定数 a の値を求めなさい。 $\cdots\cdots$答の番号【10】

小問 (2)

2 点 A，B を通る直線の式を求めなさい。 $\cdots\cdots$答の番号【11】

小問 (3)

y 軸上の $y > 0$ の部分に点 D を四角形 AOBC と四角形 ABCD の面積が等しくなるようにとる。このとき，点 D の座標を求めなさい。

$\cdots\cdots$答の番号【12】

解答

小問 (1)
$y=-\dfrac{4}{x}$ に $x=-2$ を代入して点 A の y 座標を求める。

$$y=-\frac{4}{(-2)}=2$$

A$(-2,2)$ の x，y 座標を $y=ax^2$ に代入して、

$$2=a\times(-2)^2=4a$$

よって，$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

小問 (2)
$y=-\dfrac{4}{x}$ に $x=4$ を代入して点 B の y 座標を求める。

$$y=-\frac{4}{4}=-1$$

よって，A$(-2,2)$，B$(4,-1)$ であるので，

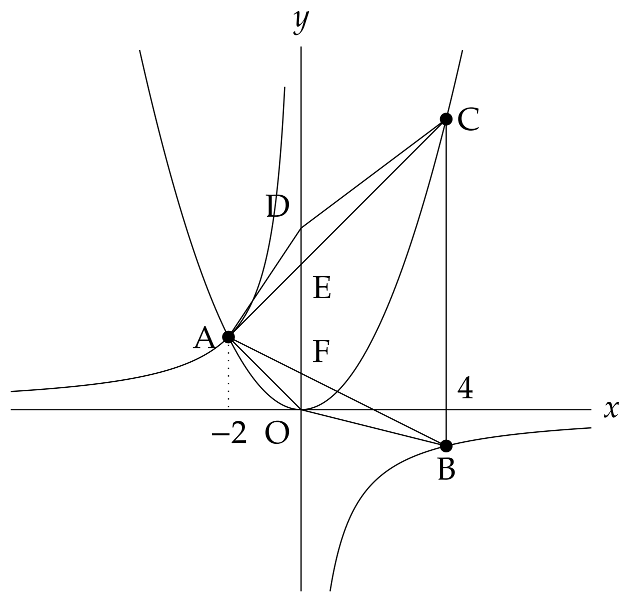
$$傾き=\frac{-1-2}{4-(-2)}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$$

$y=-\dfrac{1}{2}x+b$ に，A$(-2,2)$ の座標を代入する。

$$2=-\frac{1}{2}\times(-2)+b$$

$2=1+b$ より，$b=1$。
よって，$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+1$

小問 (3)
四角形 AOBC と 四角形 ABCD において，△ABC は共通である。よって，四角形 AOBC と四角形 ABCD の面積を同じにするためには, △AOB と △ADC の面積が同じになるように D を取ればよい。ここで，△AOF と △ADE，△BOF と △CDE はそれぞれ高さが共通の三角形であるので，FO = ED となるように D を取れば，△AOB と △ADC の面積が同じになる。F の y 座標は，小問 (2) より 1 である。直線 AC の式を求めると，A$(-2,2)$，C$(4,8)$ を用いて、



$$傾き=\frac{8-6}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$$

$y = ax + b$ に傾きと $\mathrm{A}(-2, 2)$ の座標を代入して，

$$2 = -2 + b$$

$$b = 4$$

よって，直線 AC は，$y = x + 4$ となるので，$\mathrm{E}(0, 4)$。よって，D の y 座標は $4 + 1 = 5$ である。

よって，$\therefore \mathrm{D}(0, 5)$

解説

(1) と (2) はボーナス問題です。必ず正答して下さい。

(1) 反比例の式が与えられているので，A 点の x 座標を代入して y 座標を求めて，二次関数の式に代入して下さい。

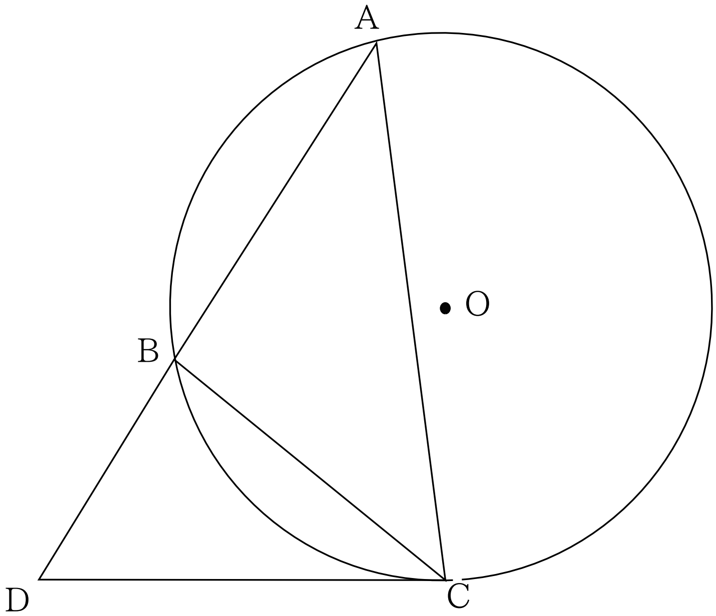
(2) 全問と同様に反比例の式に B 点の x 座標を代入して y 座標を求めて，A 点と B 点の座標から直線の式を求めます。解答例のように傾きを計算しても良いですが，$y = ax + b$ として A，B の (x, y) 座標を代入して (a, b) の連立方程式を立てて計算することも出来ます。

(3)四角形 AOBC と 四角形 ABCD で，$\triangle$ABC が重なっていることに気がついて下さい。この三角形を除いた部分の面積が等しければ四角形の面積が等しくなります。$\triangle$AOB と $\triangle$ADC が高さの等しい三角形の和であるので，底辺を等しくすれば面積が等しくなります。直線 AC の式を求めると，E 点の座標が決まります。FO = ED となるように D 点を決めます。

大問 6

問題

下の図のように, 円 O の周上に 3 点 A，B，C を，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$ で，∠ABC が鈍角となるようにとる。また，点 C における円 O の接線と直線 AB の交点を D とする。
このとき，下の問い (1) 〜 (3) に答えなさい。



小問 (1)

∠ABC = 110° であるとき，∠BDC の大きさを求めなさい。

······答の番号【13】

小問 (2)

AB = 5 cm，BD = 4 cm であるとき，線分 CD の長さを求めなさい。

······答の番号【14】

小問 (3)

(2) のとき，三角形 ADC の面積を求めなさい。 ······答の番号【15】

解答

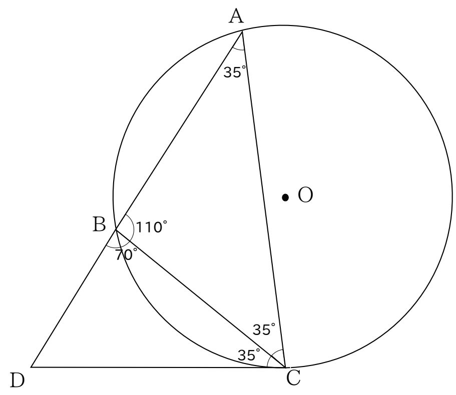
小問 (1)

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ の二等辺三角形である。

よって，$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{180-110}{2}=35°$。

また，$\angle\mathrm{DBC}=180-110=70°$。

ここで，接弦定理より，$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BAC}=35°$。



よって，$\therefore\ \angle\mathrm{BDC}=180-(70+35)=75°$

小問 (2)

$\triangle\mathrm{BDC}$ と $\triangle\mathrm{CDA}$ において接弦定理より，

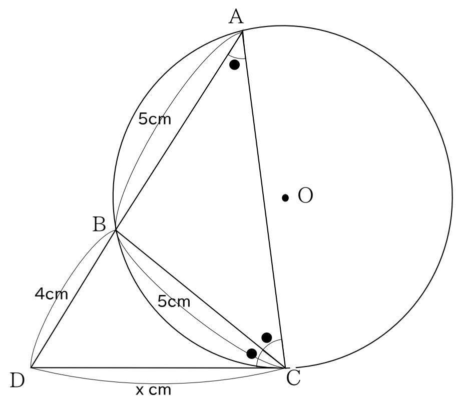
$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{CAD}$

また，$\angle\mathrm{D}$ は共通なので，$\triangle\mathrm{BDC}\sim\triangle\mathrm{CDA}$ である。

よって，$\mathrm{CD}:\mathrm{AD}=\mathrm{BD}:\mathrm{CD}$。$\mathrm{CD}=x$ とすると，

$$x:(5+4)=4:x$$

$$x^2=4\times9=36$$



よって，$\therefore\ \mathrm{CD}=x=6\,\mathrm{cm}$

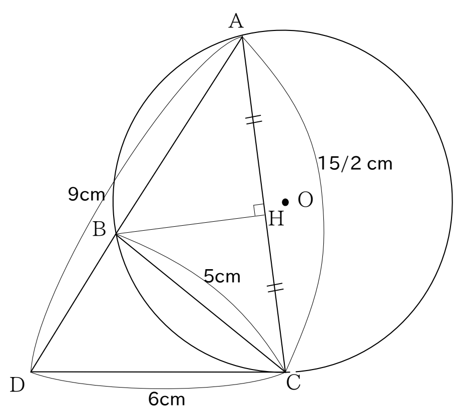
小問 (3)

前問より，$\triangle\mathrm{ADC}\sim\triangle\mathrm{CDB}$ なので，

$\mathrm{AD}:\mathrm{CD}=9:6=3:2=\mathrm{AC}:\mathrm{CB}$ よって，$2\mathrm{AC}=3\mathrm{CB}$

$$\mathrm{AC}=\frac{3}{2}\times\mathrm{CB}=\frac{3}{2}\times5=\frac{15}{2}\,\mathrm{cm}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，頂点 B から辺 AC に垂線 BH を下ろす。$\triangle\mathrm{ABC}$ は，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ の二等辺三角形で



あるので，

$$\mathrm{AH} = \frac{\mathrm{AC}}{2} = \frac{15}{4}\,\mathrm{cm}$$

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2$ より，$5^2 = \left(\dfrac{15}{4}\right)^2 + \mathrm{BH}^2$

$$\mathrm{BH}^2 = 25 - \frac{225}{16} = \frac{400-225}{16} = \frac{175}{16}$$

$$\mathrm{BH} = \frac{\sqrt{175}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4}\,\mathrm{cm}$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{15}{2} \times \dfrac{5\sqrt{7}}{4} = \dfrac{75\sqrt{7}}{16}\,\mathrm{cm}^2$。

　$\triangle\mathrm{ADC}$ と $\triangle\mathrm{CDB}$ の相似比は，$\mathrm{AD} : \mathrm{CD} = 9 : 6 = 3 : 2$
　よって面積比は，$\triangle\mathrm{ADC} : \triangle\mathrm{CDB} = 9 : 4$。ゆえに，$\triangle\mathrm{CDB} = \dfrac{4}{9} \triangle\,\mathrm{ADC}$

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ADC} - \triangle\mathrm{CDB} = \frac{5}{9}\triangle\,\mathrm{ADC} = \frac{75\sqrt{7}}{16}$$

よって，$\underline{\therefore \triangle\mathrm{ADC} = \dfrac{9}{5} \times \dfrac{75\sqrt{7}}{16} = \dfrac{135\sqrt{7}}{16}\,\mathrm{cm}^2}$

解説

　今年の数学で最も難しい問題です。問題文から $\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形であることはすぐに解ると思いますが，接弦定理が理解できているかが正答の決め手になります。また，(1) と (2) は条件が異なる別問題であることに気をつけて下さい。(2) の相似の比例式から二次方程式を作る問題は桃山の自然科学科でよく出題されます。

　(1) 接弦定理より $\angle\mathrm{BCD}$ と $\angle\mathrm{BAC}$ が等しいことを用いて，$\triangle\mathrm{BCD}$ の内角の和から求めます。

　(2) この問題は $\angle\mathrm{ABC}$ が $110°$ ではない事に気をつけて下さい。与えられた条件，$\mathrm{AB} = 5\,\mathrm{cm}$，$\mathrm{BD} = 4\,\mathrm{cm}$ で考えて下さい（私も最初うっかり $\angle\mathrm{ABC} = 110°$ として考えてしまいました）。前問と同じく接弦定理より，$\angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{CAD}$ が成り立つので，$\triangle\mathrm{BDC}$

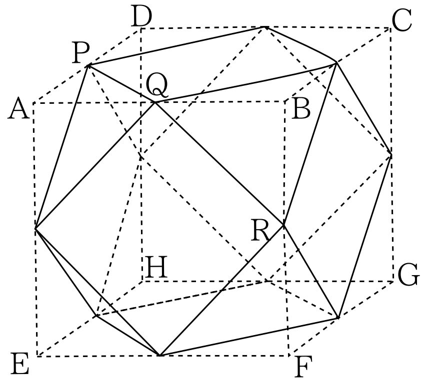
と △CDA が相似になります。求める CD を x cm とおいて比例式を作り x の二次方程式を作って求めます。

(3) この小問が今年の最も難しい問題です。前問より △BDC と △CDA の相似比が計算できます。その相似比を使って辺 BC の長さから辺 AC の長さを計算します。次に △ABC が二等辺三角形である事を使うと，AB の長さから二等辺三角形の高さが，三平方の定理を用いて計算出来ます。底辺と高さが決まったので，二等辺三角形 △ABC の面積が求まります。次に △BDC と △CDA の相似比から面積比が決まります。△ABC = △CDA(△ADC) − △BDC なので，△ABC と △ADC の面積比が求まるので，△ADC の面積を求めることが出来ます。

大問 7

問題

下の図のように，立方体 ABCD-EFGH の 8 つの頂点を，それぞれに集まる 3 つの辺の中点を通る平面で切り落とす。このようにして立方体の各頂点を切り落としてできた立体を X とする。
このとき，下の問い (1) (3) に答えなさい。



小問 (1)
立方体の辺 AD，AB，BF の中点をそれぞれ P，Q，R とするとき，∠PQR の大きさを求めなさい。
·····答の番号【16】

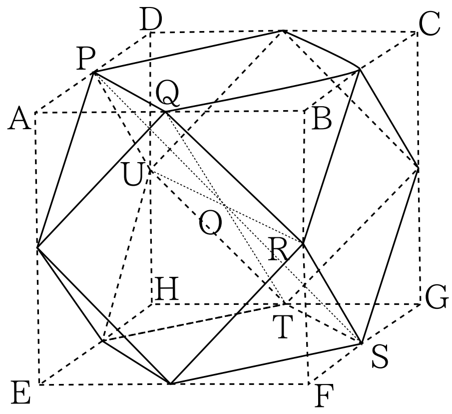
小問 (2)
立体 X の面で，四角形であるものの 1 つの面積が $18\,\mathrm{cm}^2$ であるとき，立体 X の体積を求めなさい。
·····答の番号【17】

小問 (3)
(2) のとき，立体 X の表面積を求めなさい。
·····答の番号【18】

解答

小問 (1)

辺 FG，GH，HD の中点をそれぞれ，S，T，U とすると，直線 PS，QT，RU は立方体の中心 O で交わる。



辺 $OP = OQ = PQ = \dfrac{1}{2} \times$ (立方体の面の対角線) なので，△OPQ は正三角形である。

同様にして，△OQR も正三角形になるので，

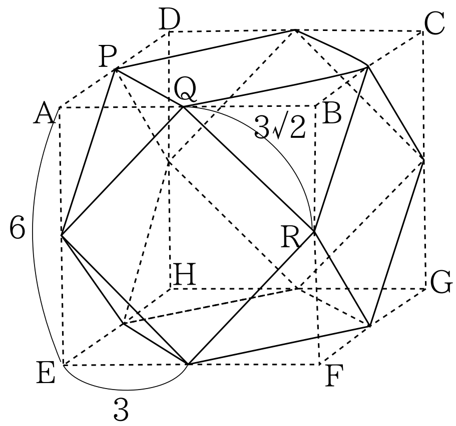
よって，$\therefore \angle PQR = \angle PQO + \angle RQO = 120°$

小問 (2)

四角形の面は正方形なので，四角形の 1 辺の長さ $= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$

四角形の対角線の長さ = 立方体の 1 辺の長さ = $3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6\,\text{cm}$

よって，



$$元の立方体の体積 = 6^3 = 216\,\text{cm}^3$$

切り取られた 1 つの三角錐は，底辺が直角を挟む 2 辺の長さ 3 cm の直角二等辺三角形であり，高さは 3 cm であるので，

$$三角錐の体積 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 3 = \frac{9}{2}\,\text{cm}^3$$

よって，$\therefore$ 立体 X の体積 $= 216 - 8 \times \dfrac{9}{2} = 216 - 36 = 180\,\text{cm}^3$

小問 (3)

立体 X の三角形の面は，1 辺が $3\sqrt{2}\,\text{cm}$ の正三角形である。

$$正三角形の高さ = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2}\,\text{cm}^2$$

その面積は，

$$正三角形の面積 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{12}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$$

よって，四角形が 6 面，三角形が 8 面あるので，

$\therefore$ 立体 X の表面積 $= 18 \times 6 + \dfrac{9\sqrt{3}}{2} \times 8 = 108 + 36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

解説

空間図形で三平方の定理が使えるかを問う問題です。

(1) 点 P，Q，R を含む平面で切った断面が正六角形になる事に気がつけば正答出来ます。解答例では 六角形 PQRSTU が正六角形になる事を示すために $\triangle$OPQ が正三角形になる事を用いていますが，問題はそこまで厳密な解答を求めていないので，入試的には直感的に正六角形になることに気づけば大丈夫です。

(2) 立体 X の四角の面が正方形になることは直感的に分かると思うので，1 辺の長さが面積の平方根で求まり，その四角形の対角線はその $\sqrt{2}$ 倍で，元の立方体の 1 辺になる事から元の立方体の体積が求まります。切り落とされた三角錐は，底面が，1 辺の長さが立方体の 1 辺の半分の長さの直角二等辺三角形で高さも同じである事を用いて，切り落とされた三角錐の体積を求めます。それを 8 倍して元の立方体の体積から引けば立体 X の体積が求まります。

(3) 三角形の面が正三角形であることを用いて，立体 X の 1 辺の長さから三角形の面積を求めて，四角形の面積 6 面，三角形の面積 8 面を足し合わせて表面積を求めます。

大問 8

問題

自然数 x を 7 で割ったときの余りを $F(x)$，3 で割ったときの余りを $G(x)$ とする。
たとえば，$F(30) = 2$，$G(30) = 0$ である。
このとき，次の問い (1)〜(3) に答えなさい。

小問 (1)
$F(2018) - G(2018)$ の値を求めなさい。 ・・・・・答の番号【19】

小問 (2)
$G(x)^2 - 4G(x) + 3 = 0$ を満たす 2 桁の自然数 x のうち最も大きいものを求めなさい。
・・・・・答の番号【20】

小問 (3)
$G(F(x) + 1) = 0$ を満たす 100 以下の自然数 x は全部でいくつあるか答えなさい。
結論を導く過程がわかるように，考え方も書きなさい。 ・・・・・答の番号【21】

解答

小問 (1)

$2018 \div 7 = 288 \cdots 2$，$2018 \div 3 = 672 \cdots 2$ なので，

$\therefore F(2018) - G(2018) = 2 - 2 = 0$

小問 (2)

$G(x) = X$ とすると，与えられた方程式は，

$$X^2 - 4X + 3 = 0$$

$$(X - 1)(X - 3) = 0$$

よって，$X = 1, 3$ だが，$G(x)$ は 3 で割ったあまりなので，取る値は $0, 1, 2$。よって，$X = 3$ は不適。

よって，$G(x) = 1$

3 の倍数で 2 桁の自然数の最大値は 99 である。
よって，$\therefore x$ の最大値 $= (99+1)-3 = 97$

小問 (3)

$G(F(x)+1) = 0$ より，$F(x)+1$ は 3 の倍数である。$F(x)$ は 7 で割ったあまりなので，取る値は $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$。

よって，$F(x)+1$ が取る値は，$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$。この中で 3 の倍数は $3, 6$。

よって，$F(x)+1 = 3, 6$。従って，$F(x) = 2, 5$

100 以下の 7 の倍数は，$100 \div 7 = 14 \cdots 2$ より，14 個ありその最大値は，$14 \times 7 = 98$。

$98 + 2 = 100$ より，100 以下で $F(x) = 2$ となる x の最大値は 100。よって，100 以下の $F(x) = 2$ の解の個数は，14 個。$\cdots$①

$98 + 5 = 103$ なので，100 以下で $F(x) = 5$ となる x の最大値は $103 - 7 = 96$。$96 \div 7 = 13 \cdots 5$ より，100 以下の $F(x) = 5$ の解の個数は，13 個。$\cdots$②

よって，①，②より，

$\therefore G(F(x)+1) = 0$ の解の個数 $= 14 + 13 = 27$ 個

解説

最後の大問で数学オリンピックっぽい問題ですが，(1) はボーナス問題です。正解して下さい。

(1)$2018 \div 7$ と $2018 \div 3$ の余りを求めて引き算するだけです。

(2) 先ず $G(x)$ に関する二次方程式を解きます。この時，$G(x)$ は自然数を 3 で割った余りなので取る値が $0, 1, 2$ である事に気をつけてください。余りについては高 1 の数学A の整数論で正式に学ぶ内容ですが，これまでの経験で分かると思います。2 桁の 3 の倍数の最大値が 99 であるので，3 で割って余り 1 となる 2 桁の最大数は $99 + 1 - 3$ です。

(3) 難度としてはそれほど高くないですが，記述問題なので論理的な解答を書いて下さい。$G = 0$ となるのは 3 の倍数なので，$F(x)+1$ が 3 の倍数になることが分かります。F は 7 で割った余りなので取る値は $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ です。従って，$F(x)+1$ が取る値は $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ に限られます。その中で 3 の倍数は $3, 6$ ですので，$F(x) = 2, 5$ となります。100 以下の自然数で 7 で割った余りが 2 になる数の最大値と 5 になる数の最大値をそれぞれ求めて，個数を計算して合計します。